**Matematica Discreta**

Settembre 2022

Lorenzo Falchi

**Introduzione** 3

**Teoria “ingenua” degli insiemi** 3

**Introduzione**

Matematica discreta è la branca della matematica che non comprende il continuo (non tratteremo limiti, derivate eccetera, quella parte sarà trattata in analisi).

Il corso tratterà 3 macro-argomenti:

-aritmetica (divisa in numeri interi e modulare);

-permutazioni;

-combinatoria.

**Teoria “ingenua” degli insiemi**

Come prima cosa, rispondiamo alla domanda: cos’è un insieme?

Un insieme è una collezione di oggetti detti elementi dell’insieme.

È anche necessario che sia chiaro un criterio oggettivo per cui un elemento appartenga o non appartenga ad un insieme.

* Insieme delle attrici italiane nate dopo 01/01/1900 🡪 criterio oggettivo
* Insieme delle attrici italiane brave 🡪 criterio non oggettivo

In generale gli insiemi si denotano con le lettere maiuscole mentre gli elementi con le lettere minuscole.

Gli elementi possono appartenere o non appartenere agli insiemi.

L’elemento ‘a’ appartiene all’insieme A se .

L’elemento non ‘a’ appartiene all’insieme A se .

Esempio:

n.b. un insieme può essere può essere elemento di un altro insieme.

(un insieme può essere elemento di sé stesso? [paradosso])

Useremo principalmente due modi per definire gli insiemi.

1. elencare tutti gli elementi da cui è formato:

definisco l’insieme B come .

Sottolineiamo che l’ordine degli elementi e le ripetizioni non contano niente, perciò

**.**

Introduciamo ora l’insieme dei numeri interi che si denota con .

1. Tramite le dichiarazioni formali:

.

Introduciamo ora i **quantificatori universali**, essi ci aiuteranno con le dichiarazioni e formali e sono:

* 🡪 esiste;
* 🡪 per ogni.

L’insieme vuoto si denota con ed è l’insieme privo di elementi.

Seguendo le due modalità definite prima, diremo che:

**-**  (1.);

**-** (2.).

Esempio:

ha conseguito un titolo di licenza superiore.

Vogliamo negare che vale la proprietà P. (vale la proprietà P = = )

Scriviamo:

**.**

Vogliamo negare che t.c. vale la proprietà P.

Scriviamo:

La negazione trasforma un quantificatore nell’altro.

**Sottoinsiemi**

Consideriamo

quindi

ma (gli insiemi non sono uguali).

Alcuni esempi estremi sono:

**L’insieme delle parti**

Dato insieme, l’insieme delle parti di A si definisce come

**.**

Esempio:

(3 elementi)

(8 elementi)

(che relazione c’è tra 3 ed 8?)

**🡪 vero**

**🡪 falso [non è , è l’insieme che contiene solo ]**

**🡪 falso**

**🡪 vero**

**🡪 vero**

Dati

insiemi e :

* è l’intersezione e si scrive
* è l’unione e si scrive

con

(tip: scrivo tutti gli elementi di uno e poi ci aggiungo gli altri)

Esempio:

(m.c.m. tra 4 e 6)

**Complementare**

Dati e con , allora

(complementare)

Esempio:

**Leggi di de Morgan**

Dati con :



**Da dimostrare**

L’insieme è definito assiomaticamente.

è l’insieme che è caratterizzato da questi assiomi:

* secon , allora ;
* **0** non è successore di alcun **;**
* **(principio di induzione)**

Sia **t.c. 🡺**

**Dimostrazione per assurdo**

Esempio:

“ non è un numero razionale”

Supponiamo con  **🡪 🡪** è pari.

* è pari 🡪 con 🡪 **🡪** ;

**🡪 🡪** è pari **🡪** n è pari 🡺 contraddizione

**Dimostrazione per induzione**

Esempio:

.

.

.

Per 🡺 🡪 🡪 .

Supponiamo la formula vera per un certo , cosa succede se

passo ad ?

Esempio:

elementi:

elementi:

Quindi sembrerebbe valere

**dimostriamolo per induzione**.

**Base induttiva:**

**perché se , 🡺**

**Ipotesi induttiva:**

**🡺**

passo a , organizzo i sottoinsiemi di su 2 righe in questo modo:

riga1 🡪 sottoinsiemi che non contengono

riga2 🡪 sottoinsiemi che contengono

quindi:

🡪

🡪

**Partizioni e Quozienti**

Dato un insieme,unricoprimentodi è una famiglia di sottoinsiemi di

Esempio:

(non è una partizione)

Una **partizione** di A è un ricoprimento t.c.

**-** per l’esempio di prima:

**-**

Esempio:

sono una partizione di A

Consideriamo l’insieme e una sua partizione

Se è una partizione di **A**, allora l’insieme di si dice **insieme quoziente** di .

**Prodotto cartesiano**

Dati due insiemi , definisco prodotto cartesiano di l’insieme

.

In questo caso, **l’ordine conta**.

Considerati

Più in generale

* **🡪** ;
* **🡪** coppie, ci sono coppie di questo tipo;
* insiemi,
* insiemi

**Funzioni**

idea: definire una funzione tramite il suo grafico